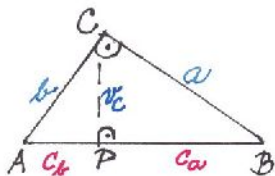


7. Eukleidovy věty, věta Pythagorova (pravoúhlý Δ)



$a, b \dots$ délky odvěsny $c \dots$ délka přepony $v_c \dots$ výška na přeponu

$c_a \dots$ úsek přepony přilehlý k odvěsně a ($|BC| = a$)

$c_b \dots$ úsek přepony přilehlý k odvěsně b ($|AC| = b$)

$$c = c_a + c_b$$

$$\Delta ACB \sim \Delta ABC \sim \Delta CBP (uu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta ACP \sim \Delta ABC \Rightarrow b : c_b = c : b \quad \frac{b}{c_b} = \frac{c}{b} \quad b^2 = c c_b \quad \left. \begin{array}{l} \text{EUKLEIDOVY VĚTY} \\ \text{O ODVĚSNÁCH} \end{array} \right\}$$

$$\Delta CBP \sim \Delta ABC \Rightarrow a : c_a = c : a \quad \frac{a}{c_a} = \frac{c}{a} \quad a^2 = c c_a$$

$$\Delta ACP \sim \Delta CBP \Rightarrow c_b : v_c = v_c : c_a \quad \frac{c_b}{v_c} = \frac{v_c}{c_a} \quad v_c^2 = c_a c_b \quad \left. \begin{array}{l} \text{EUKLEIDOVA VĚTA} \\ \text{O VÝŠCE} \end{array} \right\}$$

EUKLEIDOVA VĚTA

- O VÝŠCE $v_c^2 = c_a c_b$

V každém pravoúhlém Δ je druhá mocnina výšky na přeponu rovna součinu délek obou úseků přepony.

- JINÉ ZNĚNÍ (geom.): Obsah čtverce sestojícího nad výškou pravoúhlého Δ se rovná obsahu obdélníka sestojícího z obou úseků přepony.

- O ODVĚSNÁCH $a^2 = c c_a$ $b^2 = c c_b$

V každém pravoúhlém Δ je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku.

- JINÉ ZNĚNÍ (geom.): Obsah čtverce sestojícího nad odvěsnou pravoúhlého Δ se rovná obsahu obdélníka sestojícího z přepony a přilehlého úseku.

- POKUD SEČTEME A UPRÁVÍME

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = c c_a \\ b^2 = c c_b \end{array} \right\} \oplus$$

$$c = c_a + c_b$$

$$a^2 + b^2 = c c_a + c c_b \quad c_a + c_b = c$$

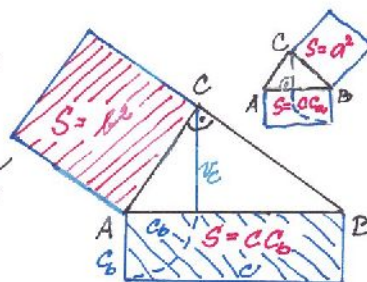
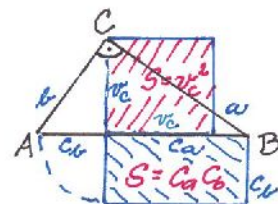
$$a^2 + b^2 = c (c_a + c_b)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{PYTHAGOROVA VĚTA}$$

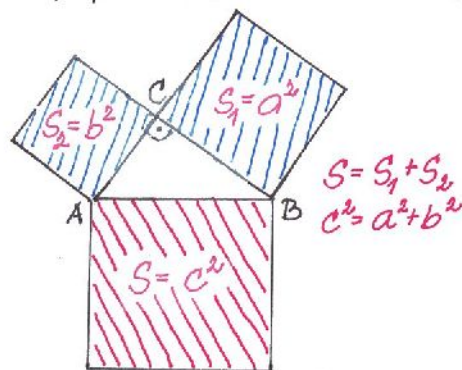
PYTHAGOROVA VĚTA $c^2 = a^2 + b^2$

V každém pravoúhlém Δ je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsny.

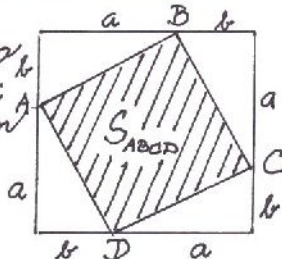
- JINÉ ZNĚNÍ (geom.): Obsah čtverce sestojícího nad přeponou pravoúhlého Δ se rovná součtu obsahů čtverců sestojících nad oběma odvěsnami.



PYTHAGOREJSKÁ ČÍSLA - trojice
přím. čísla vyhovující rovnici
 $x^2 + y^2 = z^2$
(např. 3, 4, 5 6, 8, 10 5, 12, 13
8, 15, 17 ...)



délkami mnoha
- např. čtverec
VELKÝ a NĚM
MENŠÍ



$$S_{ABCD} = c^2$$

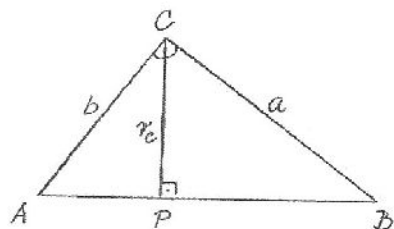
$$\left. \begin{array}{l} S_{ABCD} = S_{\square} - 4 S_{\Delta} = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} ab = \\ = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 \end{array} \right\} c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{obd.}$$

PYTHAGOREJSKÉ Δ - pravoúhlé Δ
- strany Pythag. čísla

11) Známosti graficky Euklidovy věty a Pythagorovu větu
(návod: viz dříve)

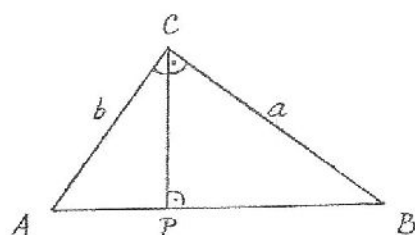
- Euklidova věta
o VÝŠCE

$$v_c^2 = c c_p$$

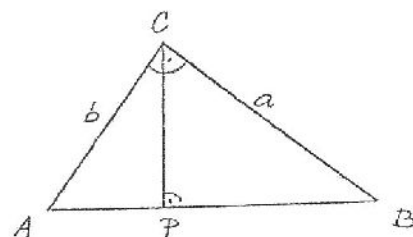


- Euklidova věta
o ODVĚSNĚ

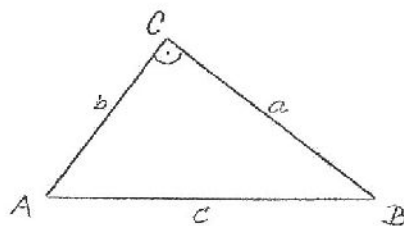
$$a^2 = c c_a$$



$$b^2 = c c_b$$



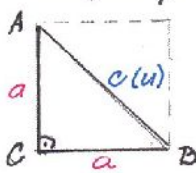
- Pythagorova věta
 $c^2 = a^2 + b^2$



Příklady

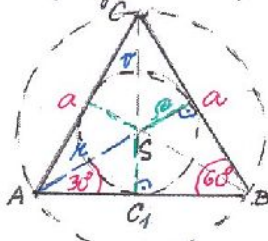
① Účty

1.136 a) délku přepony pravoúhlého rovnostranního Δ s odvěsnou a (obdobu: délku úhlopříčky čtverce o straně a)



Pyth. věta $c^2 = a^2 + a^2$
 $c^2 = 2a^2$
 $c = a\sqrt{2}$ [$u_1 = a\sqrt{2}$]

b) výšku v , poloměr kružnice opsané κ a vepsané ρ v rovnostranním Δ o straně a



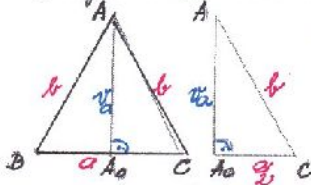
κ P.V. $a^2 = v^2 + (\frac{a}{2})^2$
 $v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$
 $v^2 = \frac{3a^2}{4}$
 $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



② $\cos 30^\circ = \frac{a/2}{\kappa}$
 $\kappa \cos 30^\circ = \frac{a}{2}$
 $\kappa = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$
 $\rho = \frac{a}{2} \tan 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
 $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

[NEBO $\kappa = \frac{2}{3}v$ $\rho = \frac{1}{3}v$]

c) výšku v_a k odchýlně v rovnostranním Δ s odchýlnou a a kmitum b

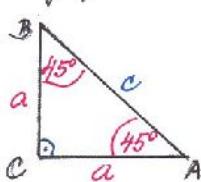


Pyth. v.
 $b^2 = v_a^2 + (\frac{a}{2})^2$
 $v_a^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$
 $v_a = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$

$v_a^2 = \frac{1}{4}(4b^2 - a^2)$
 $v_a = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$ příp. $\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$

② Boháči, ře

1.137 a) v pravoúhlém rovnostranním ΔABC je poměr stran $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$ ($1+1=2$)



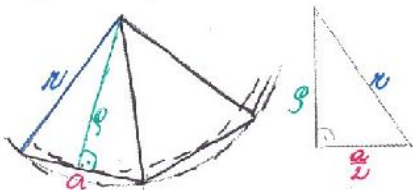
$a=b$ výj. pomocí strany
 $c^2 = a^2 + a^2$
 $c = a\sqrt{2}$
 $a:b:c = a:a:a\sqrt{2}$ (zkrácením)
 $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$

b) v pravoúhlém ΔABC ($1+1=2$) kde $\alpha = 30^\circ$, je $a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$



výj. pomocí $\sin 30^\circ = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \sin 30^\circ = \frac{1}{2}c$
 $\sin 60^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}c$
 $a:b:c = \frac{1}{2}c : \frac{\sqrt{3}}{2}c : c = 1:\sqrt{3}:2$
 $a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$

③ Učty milat, maxi délku strany a , poloměrem ρ vepsané kružnice a poloměrem κ opsané kružnice pravidelním m -úhelníku



Pyth. věta
 $\kappa^2 = \rho^2 + (\frac{a}{2})^2$

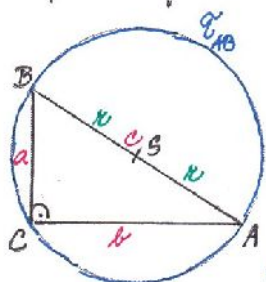
④ Rozhodnutí, zda jsou Δ pravoúhlé, jejichž mají strany

1.142 a) 3cm, 4cm, 6cm b) 5cm, 12cm, 13cm
 P.V. $6^2 = 3^2 + 4^2$ P.V. $13^2 = 5^2 + 12^2$
 $36 = 9 + 16$ $169 = 25 + 144$
 $36 \neq 25$ NE $169 = 169$ ANO

c) $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ největší
 $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$
 $m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$
 $0 = 0$ ANO

d) $2m$, $m^2 + 1$, $m^2 - 1$ [$m > 1, m \in \mathbb{N}$] největší
 $(m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2$
 $m^4 + 2m^2 + 1 = m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2$
 $2m^2 + 1 = 2m^2 + 1$
 $0 = 0$ ANO

- ⑤ Délky odvěsen pravoúhlého Δ jsou $a = 30 \text{ cm}$, $b = 14,5 \text{ cm}$. Vypočítejte poloměr κ a q kružnice Δ opsané a vepsané.

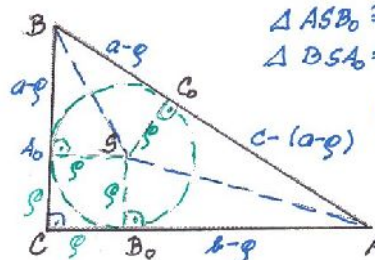


Thalésova kruž.

$$C = 2\kappa$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{C}{2} = \frac{32,5}{2}$$

$$\kappa = 16,25 \text{ cm}$$



$$\Delta ASB_0 \cong \Delta ASC_0 \text{ (SSU)}$$

$$\Delta BSA_0 \cong \Delta BSC_0 \text{ (SSU)}$$

$$|AC_0| = |B_0A|$$

$$c - (a - q) = b - q$$

$$c - a + q = b - q$$

$$2q = a + b - c$$

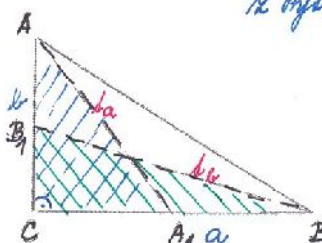
$$q = \frac{a + b - c}{2}$$

⑥ $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 30^2 + 14,5^2 = 1056,25 \Rightarrow c = 32,5 \text{ cm}$$

$$q = \frac{30 + 14,5 - 32,5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

- ⑥ Vypočítejte délky stran pravoúhlého ΔABC ($\angle C = 90^\circ$), je-li $d_a = 8 \text{ cm}$, $d_b = 12 \text{ cm}$.
k Pyth. v.



ΔA_1AC , ΔB_1BC
pravoúhlé

$$d_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2$$

$$64 = b^2 + \frac{a^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$256 = 4b^2 + a^2 \quad | (-4) \cdot (*)$$

$$546 = b^2 + 4a^2$$

$$-1024 = -16b^2 - 4a^2$$

$$546 = b^2 + 4a^2 \quad \textcircled{+}$$

$$-448 = -16b^2$$

$$15b^2 = 448$$

$$b^2 = \frac{448}{15}$$

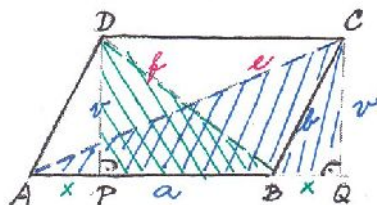
$$b = 5,50 \text{ cm}$$

$$k (*) a^2 = 256 - 4 \cdot \frac{448}{15}$$

$$a^2 = 136,57$$

$$a = 11,7 \text{ cm}$$

- ⑦ Dokažte, že v kosmickém ABCD platí mezi úhlopříčkami a stranami
2.1179 $d^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$



$$k \Delta ACQ \quad d^2 = (a+x)^2 + v^2$$

$$k \Delta BDP \quad f^2 = (a-x)^2 + v^2 \quad \textcircled{+}$$

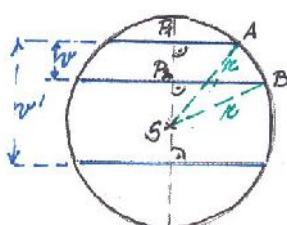
$$d^2 + f^2 = a^2 + 2ax + x^2 + v^2 + a^2 - 2ax + x^2 + v^2$$

$$d^2 + f^2 = 2a^2 + 2v^2 + 2x^2 \quad k \Delta BCQ:$$

$$d^2 + f^2 = 2a^2 + 2(v^2 + x^2) \quad \leftarrow b^2 = v^2 + x^2$$

$$d^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow d^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

- ⑧ Dvě kosmické čílny v kružnici o poloměru 6 cm mají délky 6 cm a 10 cm.
1.148 Určete jejich vzdálenost.



$$\frac{d_1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\kappa^2 = r^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$$

$$r_1^2 = 36 - 9$$

$$r_1^2 = 27$$

$$r_1 = \sqrt{27}$$

$$\frac{d_2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$\kappa^2 = r^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$r_2^2 = 36 - 25$$

$$r_2^2 = 11$$

$$r_2 = \sqrt{11}$$

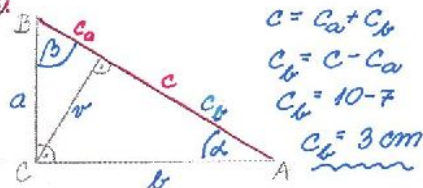
2 řešení

$$r = r_1 - r_2 = \sqrt{27} - \sqrt{11} = 1,9 \text{ cm}$$

$$r' = r_1 + r_2 = \sqrt{27} + \sqrt{11} = 8,5 \text{ cm}$$

9) mělu vstřijící strany $a, b, c, c_a, c_b, v, d, \beta$ v $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$)
 1.139 a) $c = 10 \text{ cm}, c_a = 7 \text{ cm}$

20
dok.



$$\begin{aligned} c &= c_a + c_b \\ c_b &= c - c_a \\ c_b &= 10 - 7 \\ c_b &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Eukl. věta o výšce
 $v^2 = c_a c_b$
 $v^2 = 7 \cdot 3$
 $v^2 = 21$
 $v = \sqrt{21} \text{ cm}$

Eukl. věta o odvěsné
 $a^2 = c c_a$
 $a^2 = 10 \cdot 7$
 $a^2 = 70$
 $a = \sqrt{70} \text{ cm}$

Pythagor.
 $c^2 = a^2 + b^2$
 $10^2 = 70 + b^2$
 $b^2 = 30$
 $b = \sqrt{30} \text{ cm}$

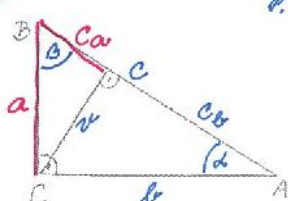
[LZE ŘEŠIT I V JINÉM
 PORADÍ - MĚLIŠ
 NA PORADÍ DOPŮČÍLANÝCH
 PRŮMĚRŮ]

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ [nebo $\frac{v}{b}$]
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{70}}{10}$
 $\alpha = 56^\circ 44'$

$\beta = 90^\circ - \alpha$
 $\beta = 90^\circ - 56^\circ 44'$
 $\beta = 33^\circ 13'$

b) $a = 50 \text{ cm}, c_a = 40 \text{ cm}$ [LZE RŮZNĚ]

20



P.R. $a^2 = v^2 + c_a^2$
 $v^2 = a^2 - c_a^2$
 $v^2 = 2500 - 1600$
 $v^2 = 900$
 $v = 30 \text{ cm}$

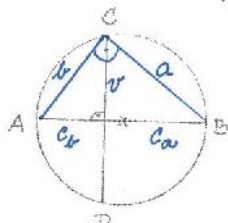
E.V. o.V.
 $v^2 = c_a c_b$
 $c_b = \frac{v^2}{c_a}$
 $c_b = \frac{900}{40}$
 $c_b = 22,5 \text{ cm}$

P.R. (nebo E.V.)
 $b^2 = c^2 - a^2$
 $b^2 = 6,25^2 - 50^2$
 $b^2 = 14,06$
 $b = 3,75 \text{ cm}$

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$
 $\sin \alpha = \frac{50}{6,25} = 0,8$
 $\alpha = 53^\circ 10'$
 $\beta = 90^\circ - \alpha$
 $\beta = 90^\circ - 53^\circ 10'$
 $\beta = 36^\circ 50'$

$c = c_a + c_b = 4 + 22,5$
 $c = 26,5 \text{ cm}$

10) Vypočítej délku síťiny v kružnici o poloměru $r = 10 \text{ cm}$, mě-li, mě
 1.149 síťina dělí průměr k ně kolmý v poměru 2:3.

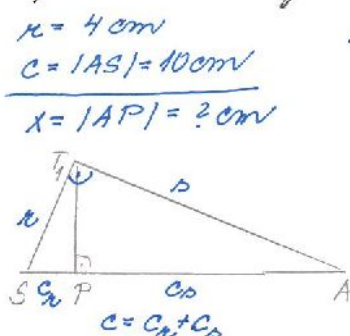
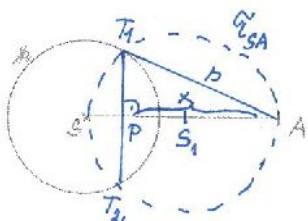


délka síťiny
 $|CD| = 2r$

$c_a : c_b = 2 : 3$
 5 dílů
 $c_a = \frac{2}{5} c$
 $c_b = \frac{3}{5} c$
 $c_a = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ cm}$
 $c_b = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12 \text{ cm}$
 $c_a = 8 \text{ cm}$
 $c_b = 12 \text{ cm}$
 $c = c_a + c_b = 8 + 12 = 20 \text{ cm}$

[LZE I $v^2 = c_a c_b = 160 - 64 = 96$
 $b^2 = c c_a$
 $b^2 = 20 \cdot 8$
 $b^2 = 160$
 $b = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ cm}$
 $v = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$
 $|CD| = 2v = 8\sqrt{6} \text{ cm} = 19,6 \text{ cm}$

11) Je dána $k(S; 4 \text{ cm})$ a bod A, $|AS| = 10 \text{ cm}$. Vypočítej vzdálenost bodu A
 1.150 od spojnice bodů dotyku síťiny s kružnicí k bodu A ze kružnicí k.



$x = c_p = |SA| - |SP|$
 $c_p = c - c_a$
 $x = 10 - 1,6$
 $x = 8,4 \text{ cm}$

Eukl. věta o odvěsné
 $k^2 = c c_p$
 $c_p = \frac{k^2}{c}$
 $c_p = \frac{16}{10}$
 $c_p = 1,6 \text{ cm}$